

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$ para $x > 0$ (\ln denota el logaritmo neperiano).

(a) [1'75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$ para $x > 0$ (\ln denota el logaritmo neperiano).

(a)
Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente de la función f es $f'(x)$. Como me dicen que dicha pendiente ($f'(x)$) tiene que ser máxima, la derivada de la función $f'(x)$ tiene que ser cero, es decir $f''(x) = 0$, y me dicen que $x > 0$, por tanto tomaremos sólo las soluciones positivas.

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x); \quad f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1x^{-2}}{2} + \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{2x^{-2-1}}{2} + \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2}.$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $\frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2} = 0$, es decir $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, luego $x^2 = x^3$, con lo cual:

$x^2 - x^3 = 0 = x^2 \cdot (1 - x)$. Soluciones $x = 0$ (doble), que no está en el dominio y $x = 1$.

Veamos que efectivamente $x = 1$ es un máximo de $f''(x)$, es decir $f'''(1) < 0$.

$$f''(x) = x^{-3} - 1 \cdot x^{-2}, \text{ de donde } f'''(x) = -3x^{-4} + 2 \cdot x^{-3} = \frac{-3}{x^4} + \frac{2}{x^3}, \text{ luego } f'''(1) = -3 + 2 = -1 < 0.$$

El punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es $(1, f(1)) = (1, 1/2)$.

(a)
Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Recta normal en $x = 1$ es $y - f(1) = (-1/f'(1)) \cdot (x - 1)$

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x); \text{ luego } f(1) = 1/2 + 0 = 1/2.$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x}, \text{ luego } f'(1) = -1/2 + 1 = 1/2.$$

La recta normal pedida es $y - (1/2) = -1/(1/2) \cdot (x - 1)$, de donde $y - (1/2) = -2 \cdot (x - 1)$, luego **la recta normal pedida es $y = -2x + 5/2$.**

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^1 \ln(4 - x) dx$ (\ln denota el logaritmo neperiano).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I = \int \ln(4 - x) dx$, que es una integral por partes

$$\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$$

$$u = \ln(4 - x), \text{ de donde } du = \frac{-1}{4 - x} dx. \quad dv = dx, \text{ de donde } v = \int dx = x$$

$$I = \int \ln(4-x) dx = x \cdot \ln|4-x| - \int x \cdot \frac{(-dx)}{4-x} = x \cdot \ln|4-x| + \int \frac{xdx}{4-x} = x \cdot \ln|4-x| - I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{xdx}{4-x}, \text{ que es una integral racional.}$$

Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{r} x \\ -x + 4 \\ \hline + 4 \end{array} \quad \frac{-x + 4}{-1}$$

Recordamos que $I_1 = \int ((C(x)) + R(x))/(div(x)) dx = \int -1 dx + \int \frac{4}{4-x} dx = -x - 4 \cdot \ln|4-x|$. Luego

$$I = x \cdot \ln|4-x| + I_1 = x \cdot \ln|4-x| + (-x - 4 \cdot \ln|4-x|) = x \cdot \ln|4-x| - x - 4 \cdot \ln|4-x|$$

La integral pedida es

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \ln(4-x) dx &= [x \cdot \ln|4-x| - x - 4 \cdot \ln|4-x|]_{-1}^1 = \\ &= (1 \cdot \ln|4-1| - 1 - 4 \cdot \ln|4-1|) - [(-1) \cdot \ln|4-(-1)| - (-1) - 4 \cdot \ln|4-(-1)|] = \\ &= \ln(3) - 1 - 4\ln(3) + \ln(5) - 1 + 4\ln(5) = \mathbf{-3\ln(3) + 5\ln(5) - 2 \cong 2'7514}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x + (m+1)y + 2z &= -1 \\ mx + y + z &= m \\ (1-m)x + 2y + z &= -m - 1 \end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $m = 2$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$

Solución

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (1)(1-2) - (m+1)(m-1+m) + (2)(2m-1+m) = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= -1 - (m+1)(2m-1) + (2)(3m-1) = -1 - (2m^2 + m - 1) + 6m - 2 = -2m^2 + 5m - 2.$$

Resolviendo la ecuación $-2m^2 + 5m - 2 = 0$, obtenemos $m = 1/2$ y $m = 2$.

Si $m \neq 1/2$ y $m \neq 2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $m = 1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2+1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1-1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3/4 = 1/4 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{vmatrix}$ saco un 2 de cada fila $= (2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera = fila =

$= 8 \cdot ((2)(-6-4) - (3)(-3-1) + (-1)(4-2)) = 8(-10) = -80 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$. Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $m = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, por que la fila 2^a se obtiene de la 1^a restándole la 3^a , luego

tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$. Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)
Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$. Para dicho valor de m , calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$

Hemos visto en el apartado anterior que si $m = 2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1^a y la 2^a).

$x + 3y + 2z = -1 \quad \rightarrow \quad x + 3y + 2z = -1$
 $2x + y + z = 2. \quad F_2 - 2F_1 \quad \rightarrow \quad -5y - 3z = 4.$ Tomo $z = a \in \mathbb{R}$, de donde $y = -3a/5 - 4/5$, y entrando en la 1^a ecuación tenemos $x + 3(-3a/5 - 4/5) + 2(a) = -1$, de donde $x + a/5 - 12/5 = -1$, luego $x = -a/5 + 7/5$.

Solución $(x,y,z) = (-a/5 + 7/5, -3a/5 - 4/5, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Tomando $z = a = 2$, la solución pedida es $(x,y,z) = (-2/5 + 7/5, -3(2)/5 - 4/5, 2) = (1,-2,2)$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Sean los vectores $u = (1,-1,0)$, $v = (0,1,2)$ y $w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

- (a) [1 punto] u , v y w están en el mismo plano.
- (b) [0'5 puntos] w es perpendicular a u y v .
- (c) [1 punto] El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores u , v y w es $1/6$.

Solución

Sean los vectores $u = (1,-1,0)$, $v = (0,1,2)$ y $w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

- (a)

u, v y w están en el mismo plano.

Sabemos que u, v y w están en el mismo plano, si los vectores u, v y w son linealmente dependientes, es decir si y solo si $\det(u,v,w) = 0$

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 = 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha = 0, \\ \text{fila} \end{array}$$

con lo cual **si $\alpha = 0$, los vectores u, v y w son linealmente dependientes, y por tanto están en el mismo plano.**

(b)

w es perpendicular a u y v .

Un vector es perpendicular a u y v es uxv , por tanto w es paralelo a uxv , y sus coordenadas son proporcionales

$$uxv = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = \vec{i}(-2) - (\vec{j})\cdot(2) + \vec{k}(1) = (-2,-2,1) \\ \text{fila} \end{array}$$

Como las coordenadas de w y las de uxv son proporcionales, tenemos:

$$w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha).$$

$$(1+\alpha)/(-2) = (2\alpha)/(-2) = (2-3\alpha)/1, \text{ de donde:}$$

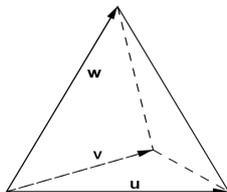
$$(1+\alpha)/(-2) = (2\alpha)/(-2) \rightarrow 1+\alpha = 2\alpha \rightarrow \alpha = 1$$

$$(1+\alpha)/(-2) = (2-3\alpha)/1 \rightarrow 1+\alpha = -4 + 6\alpha \rightarrow 5 = 5\alpha \rightarrow \alpha = 1, \text{ por tanto } w \text{ es perpendicular a la vez a } u \text{ y a } v \text{ si } \alpha = 1.$$

(c)

El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores u, v y w es $1/6$.

Sabemos que el volumen del tetraedro es $1/6$ del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores u, v y w ; es decir $1/6$ del valor absoluto del producto mixto $[u,v,w]$.



$$[u,v,w] = \det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha.$$

Como el volumen del tetraedro es $1/6$ del volumen del paralelepípedo, tenemos:

$$(1/6) \cdot |[u,v,w]| = 1/6 \text{ (Volumen que me han dado), es decir } |[u,v,w]| = 1 \rightarrow |-9\alpha| = 1, \text{ de donde tenemos dos ecuaciones: } -(-9\alpha) = 1 \text{ y } +(-9\alpha) = 1, \text{ por tanto tenemos dos ecuaciones: } \alpha = 1/9 \text{ y } -\alpha = -1/9.$$

Por tanto el volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores u, v y w es $1/6$ si tomamos $\alpha = 1/9$ y $\alpha = -1/9$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d

sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b , c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en \mathbb{R} .

Como tiene un máximo relativo en $x = -1$, sabemos que $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$$

De $f'(-1) = 0$, tenemos $3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$, de donde $-2b + c = -3$.

También me dicen que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$, luego existe el límite y se le podrá aplicar la

Regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica

que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$), con lo cual tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \frac{1 + b + c + d}{0}.$$

Como me dicen que el límite existe, puesto que vale 4, **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir $1 + b + c + d = 0$, de donde $b + c + d = -1$. Aplicamos l'Hôpital (L'H):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \{L'H\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2bx + c}{1} = 3 + 2b + c = 4 \text{ (valor del límite), de donde}$$

$$2b + c = 1.$$

Resolvemos el sistema: $-2b + c = -3$; $2b + c = 1$; $b + c + d = -1$.

Sumando 1^a y 2^a tenemos $2c = -2$, de donde $c = -1$. Entrando en la 1^a tenemos $-2b + (-1) = -3$, de donde $-2b = -2$, luego $b = 1$. Entrando en la 3^a tenemos $(1) + (-1) + d = -1$, luego $d = -1$.

Los valores pedidos son $b = 1$, $c = -1$ y $d = -1$ y $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

(a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje Ox , calculando los puntos de corte.

(c) [1'25 puntos] Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3; \text{ luego } f(2) = -(2)^2 + 2(2) + 3 = 3.$$

$$f'(x) = -2x + 2, \text{ luego } f'(2) = -2(2) + 2 = -2.$$

La recta tangente pedida es $y - 3 = -2 \cdot (x - 2)$, luego **la recta tangente pedida es $y = -2x + 7$.**

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje OX , calculando los puntos de corte.

Observamos que la recta que nos han dado $2x + y - 7 = 0$, es la tangente a f en $x = 2$, es decir $y = -2x + 7$. Como es una recta con dos puntos es suficiente para dibujarla, uno es el punto de tangencia $(2, y(2)) = (2, 3)$ y otro el corte con el eje OX (de ecuación $y=0$), luego de $0 = -2x + 7$, tenemos $x = 7/2 = 3.5$ y el otro punto es $(3.5, 0)$

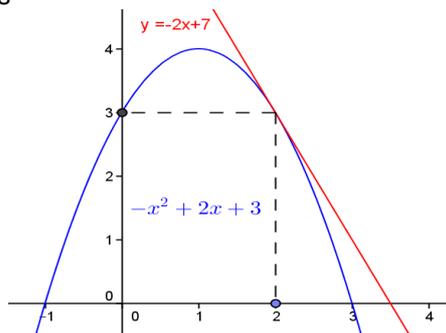
La gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (\cap) porque el n° que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = -2x + 2$, de donde $x = 1$ y el vértice es $V(1, f(1)) = V(1, 4)$.

Cortes con los ejes:

Para $x = 0$, $f(0) = 3$.

Para $f(x) = 0$, tenemos $-x^2 + 2x + 3 = 0$, y nos sale $x = -1$ y $x = 3$. Puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

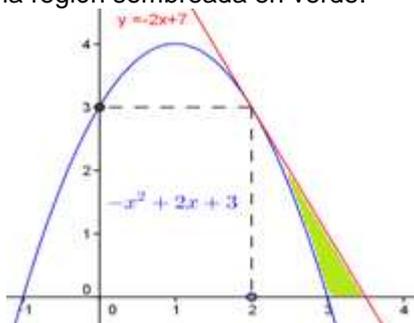
Un esbozo de las gráficas es



(c)

Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Me están pidiendo el área de la región sombreada en verde:



Si observamos la gráfica podemos calcularla como el área del triángulo que determina la recta $y = -2x + 7$ entre $x = 2$ y $x = 3.5$, menos el área bajo la parábola $f(x)$ entre $x = 2$ y $x = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{Área triángulo} - \text{Área bajo parábola} = (1/2) \cdot \text{base} \cdot \text{altura} - \int_2^{3.5} (-x^2 + 2x + 3) dx = \\ &= (1/2) \cdot (3.5 - 2) \cdot (3) - [-x^3/3 + x^2 + 3x]_2^{3.5} = 9/4 - [(-3)^3/3 + (3)^2 + 3(3)] - [-(2)^3/3 + (2)^2 + 3(2)] = \\ &= 9/4 - [(-9+9+9) - (-8/3+4+6)] = 9/4 - (5/3) = 7/12 \text{ u}^2 \cong 0.5833 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2 \cdot A + I$? (I denota la matriz identidad)

b) [1'75 puntos] Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

Solución

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2 \cdot A + I$? (I denota la matriz identidad)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}.$$

$$2 \cdot A + I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}. \text{ Igualando}$$

$$A^2 = 2 \cdot A + I, \text{ tenemos } \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}, \text{ de donde:}$$

$$m^2 + 2m + 2 = 3 + 2m \rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

Por tanto la igualdad $A^2 = 2 \cdot A + I$ es cierta si $m = \pm 1$.

b)
Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

Para $m = 1$, calcula $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, la matriz A

tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De $A \cdot X - B = A \cdot B$, tenemos $A \cdot X = B + A \cdot B$. Como existe A^{-1} , multiplicamos por la izquierda la expresión $A \cdot X = B + A \cdot B$, por A^{-1} .

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + A \cdot B) \rightarrow I_2 \cdot X = A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B + I_2 \cdot B = A^{-1} \cdot B + B$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} \cdot B + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Junio Incidencias 2014

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a "r".

b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de P a "r".

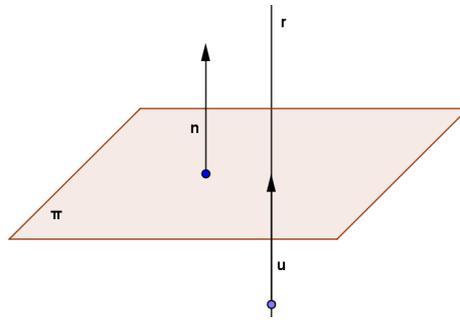
Solución

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta "r" dada por $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

a)
Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a "r".

Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando $z = \lambda \in \mathbb{R}$, con lo cual "r" $\equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$. Un

punto de "r" es $A(2,1,0)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (-1,-1,1)$.



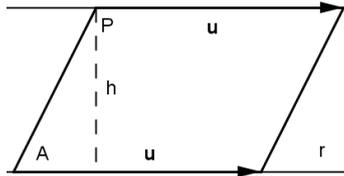
Como el plano es perpendicular a "r" el vector normal del plano \mathbf{n} coincide con el vector director de "r" el \mathbf{u} , es decir $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (-1, -1, 1)$, y la ecuación del plano π es $\mathbf{PX} \bullet \mathbf{n} = 0$, siendo $X(x, y, z)$ un punto genérico del plano y " \bullet " el producto escalar:

$$\pi \equiv \mathbf{PX} \bullet \mathbf{n} = 0 = (x-2, y+2, z) \bullet (-1, -1, 1) = -x + 2 - y - 2 + z = -x - y + z = 0$$

b)

Calcula la distancia de P a "r".

Calculamos la distancia del punto P a la recta "r", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector \mathbf{u} . Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.

El área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{AP} es $\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$, pero la altura "h" es $d(P; r)$, luego $d(P; r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$ ("x" es el producto vectorial).

De "r", punto el $A(2, 1, 0)$ y vector $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)$.

Punto $P(2, -2, 0)$. $\mathbf{AP} = (0, -3, 0)$; $\mathbf{AP} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3-0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0-3) = (-3, 0, -3)$;

$$\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Luego } d(P; r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = 3 \cdot (\sqrt{2}) / (\sqrt{3}) = \sqrt{6} \text{ u.l.}$$